

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Σεπτέμβριος 2015

**ΠΡΟΣΟΧΗ:** Η διάρκεια των εξετάσεων είναι τρεις ώρες. Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα (2.5 μονάδες το καθένα). Καλή Επιτυχία.

**Θέμα 1 :** Δίνεται η εξίσωση:  $f(x) = 2^x - \frac{1}{x} = 0$ . Να αποδειχτεί, ότι αυτή έχει μια απλή ρίζα  $\xi$  στο διάστημα  $I = [\frac{1}{2}, 1]$  και ότι ο αλγόριθμος  $x_{n+1} = 2^{-x_n}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , παράγει ακολουθία που συγκλίνει στη ρίζα  $\xi$  για κάθε  $x_0 \in I$ . Να βρεθούν οι δυο πρώτες επαναλήψεις αυτού με  $x_0 = 1$ .

**Θέμα 2 :** Να γίνει η  $LU$  παραγοντοποίηση του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Στη συνέχεια να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα  $A$  χρησιμοποιώντας την  $LU$  παραγοντοποίηση. (Να γίνουν ακριβείς πράξεις διατηρώντας κλάσματα στους υπολογισμούς.)

**Θέμα 3 :** Να προσαρμοστεί πολυώνυμο το πολύ δευτέρου βαθμού στον πίνακα τιμών της συνάρτησης  $f$ :

$$\begin{array}{c|ccc} x_i & -1 & 0 & 1 \\ \hline f(x_i) & 1 & 0 & 0 \end{array},$$

χρησιμοποιώντας τον τύπο παρεμβολής του Νεύτωνα με διαιρεμένες διαφορές. Αν  $f \in C^3[-1, 1]$  και  $\max_{x \in [-1, 1]} |f^{(3)}(x)| = 3$ , να βρεθεί ένα φράγμα για το μέγιστο απόλυτο σφάλμα κατά την παρεμβολή στο διάστημα  $[-1, 1]$ .

**Θέμα 4 :** Δοθέντος ότι η συνάρτηση  $f$ , που δίνεται από τον πίνακα τιμών:

$$\begin{array}{c|cccc} x_i & -3 & -1 & 1 & 3 \\ \hline f_i & -32 & 0 & 0 & 16 \end{array},$$

είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού, να βρεθούν οι ακριβείς τιμές των ολοκληρωμάτων  $\int_{-3}^{-1} f(x)dx$ ,  $\int_{-1}^1 f(x)dx$  και  $\int_1^3 f(x)dx$ , χρησιμοποιώντας κατάλληλους τύπους αριθμητικής ολοκλήρωσης, χωρίς να βρεθεί η  $f$ .